Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 6 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(5 Punkte)* Sei X eine nichtleere Menge. Zeige, dass eine Funktion

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

genau dann eine Metrik auf X ist, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(a) $\forall\, u, v \in X :\ d(u,v) = 0 \iff u = v$,

(b) $\forall\, u, v, w \in X :\ d(u,v) \leq d(w,u) + d(v,w)$.

Lösung.
„$\Longleftarrow$“:
Es sei $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die (a) und (b) erfüllt. Dann folgt aus (a) die Definitheit von d.
Allerdings fordern die Bedingungen (a) und (b) noch nicht ausdrücklich die Symmetrie und Positivität von d, und insofern ist auch (b) noch nicht die Dreiecksungleichung. Können wir also zeigen, dass (a) und (b) zusammen Symmetrie, Positivität und Dreiecksungleichung für d implizieren, dann zeigt das, dass d eine Metrik ist.

Nun folgt aus (b) die Symmetrie von d, denn

$$d(u,v) \overset{(b)}{\leq} d(u,u) + d(v,u) = d(v,u) \overset{(b)}{\leq} d(v,v) + d(u,v) = d(u,v)\,.$$

Die Positivität von d erhalten wir dann, weil für $u, v \in X$ gilt

$$0 = \frac{1}{2}\, d(u,u) \overset{(b)}{\leq} \frac{1}{2}\,(d(u,v) + d(v,u)) = d(u,v).$$

Schließlich folgt auch die Dreiecksungleichung,

$$d(u,v) \leq d(w,u) + d(v,w) = d(u,w) + d(w,v),$$

für $u, v, w \in X$. Die Abbildung d ist also tatsächlich eine Metrik auf X.

„$\Longrightarrow$“:
Es sei d eine Metrik auf X. Eigenschaft (a) folgt dann direkt aus der Definition. Wir müssen also noch zeigen, dass (b) gilt. Das folgt mit Hilfe der Symmetrie von d zusammen mit der Dreiecksungleichung: Für $u, v, w \in X$ erhalten wir

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) = d(w,u) + d(v,w).$$

■

Aufgabe 2: *(5 Punkte)* Auf $\mathbb{R}^2$ ist der *euklidische Abstand* $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d_2(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \qquad \text{für } x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeige, dass die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_2(x,y) & \text{falls } y = tx \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ d_2(x,0)+d_2(0,y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Lösung. Die Symmetrie ist klar und die positive Definitheit von d folgt direkt aus der von d_2. Für die Dreiecksungleichung machen wir eine Fallunterscheidung nach der relativen Lage von x, y, z und $(0,0)$.

- $\underline{\exists t, s \in \mathbb{R} : x = ty, y = sz}$ ($x, y, z, (0,0)$ sind collinear).
  Dann gilt
  $$d(x,y) = d_2(x,y) \le d_2(x,z) + d_2(z,y) = d(x,z) + d(y,z)\,,$$
  wegen der Dreiecksungleichung für d_2.

- $\underline{\exists t \in \mathbb{R} : x = ty,\ \nexists s \in \mathbb{R}, s \neq 0 : y = sz}$ ($x, y, (0,0)$ sind collinear, z liegt nicht in der Geraden durch x, y). Dann gilt
  $$\begin{aligned} d(x,y) = d_2(x,y) &\le d_2(x,0) + d_2(0,y) \\ &\le d_2(x,0) + d_2(y,0) + 2d_2(0,z) \\ &= d(x,z) + d(z,y)\,, \end{aligned}$$
  wo wir in der ersten Zeile die Definition von d und die Dreiecksgleichung für d_2 verwendet haben, und in der zweiten Zeile die positive Definitheit von d_2.

- $\underline{\exists t : x = tz, \nexists s \in \mathbb{R}, s \neq 0 : z = sy.}$
  Dann gilt
  $$\begin{aligned} d(x,y) &= d_2(x,0) + d_2(0,y) \\ &= d_2(x-z+z,0) + d_2(y,0) \\ &= d_2(x+z,z) + d_2(y,0) \\ &\le d_2(x,z) + d_2(z,0) + d_2(0,y) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$
  Den Fall, wenn y, z auf derselben Gerade durch $(0,0)$ liegen, aber x nicht, brauchen wir nicht separat betrachten, da die entsprechende Aussage sofort durch Analogie folgt.

- $\underline{\nexists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 : x = ty \vee y = tz \vee x = tz.}$
  Dann gilt
  $$\begin{aligned} d(x,y) &= d_2(x,0) + d_2(0,y) \\ &\le d_2(x,0) + d_2(0,y) + 2d_2(z,0) = d(x,z) + d(y,z). \end{aligned}$$

■